CHAPITRE 5

NOMBRES RÉELS

I. Propriétés des réels

Définition 5.1

On admet l'existence de l'ensemble des nombres réels, noté $\mathbb{R}$. Cet ensemble muni de l'addition et de la multiplication, noté $(\mathbb{R},+,\times)$ est un **corps**, c'est à dire un ensemble vérifiant les propriétés suivantes :

- $\forall x\in\mathbb{R},\ x+0=0+x=x$ (0 est **élément neutre** pour l'addition)
- $\forall x\in\mathbb{R},\ \exists y\in\mathbb{R}, x+y=y+x=0$ (tout réel admet un **opposé**, pour tout $x\in\mathbb{R}$ on note $-x$ l'opposé de x).
- $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x+y=y+x$ (l'addition est **commutative**)
- $\forall x\in\mathbb{R},\ 1\times x=x\times 1=x$ (1 est **élément neutre** pour la multiplication).
- $\forall x\in\mathbb{R}^*,\ \exists y\in\mathbb{R}^*,\ x\times y=y\times x=1$ (tout réel non nul admet un **inverse**, pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, on note $\frac{1}{x}$ l'inverse de x).
- $\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x\times(y+z)=x\times y+x\times z$ (la multiplication est **distributive** par rapport à l'addition)
- $\forall (a,b,c)\in\mathbb{R}^3, a+(b+c)=(a+b)+c$ et $a\times(b\times c)=(a\times b)\times c$ (associativité de la multiplication et de l'addition)

De plus : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x\times y=y\times x$. Un corps dans lequel la multiplication est commutative est appelé **corps commutatif**.

Exemple 5.1

L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est aussi un corps qui est inclus dans le corps des réels : $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$.

L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est aussi un corps, contenant le corps des réels : $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$

L'ensemble $\mathbb{Z}$ des nombres rationnels n'est pas un corps : les éléments différents de 1 et -1 n'ont pas d'inverse pour la multiplication dans $\mathbb{Z}$.

Proposition 5.1 (admise)

L'ensemble des réels peut être mis en bijection avec l'ensemble des points d'une droite gradué, chaque point ayant pour abscisse le réel associé par cette bijection. Cette droite s'appelle la **droite numérique réelle**.

On peut penser à l'ensemble des nombres réels comme un ensemble continu : entre deux réels distincts il existe toujours une infinité d'autres réels. Par opposition, l'ensemble des entiers relatifs est lui **discret**.

Propriété 5.2 (admise)

L'ensemble des réels est **intègre**, c'est à dire qu'il a la propriété suivante :

$$\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2, a\times b=0 \Longleftrightarrow (a=0 \quad \text{ou} \quad b=0)$$

II. Manipulation d'inégalité, intervalle

Définition 5.2

L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une **relation d'ordre totale** $\leq$, c'est à dire une proposition dont la valeur de vérité dépend de x et y et vérifiant les trois propriété suivantes :

- $\forall x\in\mathbb{R},\ x\leq x$ (réfléxivité)

- $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $(x\leq y \text{ et } y\leq x) \Longrightarrow x=y$ (antisymétrie)
- $\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $(x\leq y \text{ et } y\leq z) \Longrightarrow x\leq z$ (transitivité)
- $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $x\leq y$ ou $y\leq x$

On note $x<y$ si $x\leq y$ et $x\neq y$.
On note $x\geq y$ si $y\leq x$ (une seule définition suffit).

On rappelle les règles de manipulations d'inégalités suivantes :

Proposition 5.3

Pour tout $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ on a :

- Si $a\leq b$, alors $a+c\leq b+c$
- Si $a\leq b$ et $c\leq d$ alors $a+c\leq b+d$
- Si $a\leq b$ et $c<d$ alors $a+c<b+d$.
- Si $a\leq b$ et $c\geq 0$, alors $ac\leq bc$.
- Si $a\leq b$ et $c\leq 0$, alors $ac\geq bc$.
- Si $a\leq b$ et $c>0$, alors $\frac{a}{c}\leq\frac{b}{c}$.
- Si $a\leq b$ et $c<0$, alors $\frac{a}{c}\geq\frac{b}{c}$.
- Si $a\leq b$ et si a et b sont de même signe, alors $\frac{1}{a}\geq\frac{1}{b}$.

Définition 5.3

Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ deux réels avec $a<b$. On utilisera les notations suivantes pour les intervalles de nombres :

- $]a;b[=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x<b\}$
  $[a;b[=\{x\in\mathbb{R}\mid a\leq x<b\}$
  $]a;b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\leq b\}$
  $[a;b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a\leq x\leq b\}$
- $]a;+\infty[=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\}$
  $[a;+\infty[=\{x\in\mathbb{R}\mid a\leq x\}$
- $]-\infty;b[=\{x\in\mathbb{R}\mid x<b\}$
  $]-\infty;b]=\{x\in\mathbb{R}\mid x\leq b\}$

On appelle **segment** un intervalle fermé borné de la forme $[a;b]$

Définition 5.4

On note $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{Q}^*$ et $\mathbb{R}^*$ les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ respectivement privés de $\{0\}$.
On peut ainsi écrire $\mathbb{R}^*=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$. On note aussi $\mathbb{R}_+=[0,+\infty[$, $\mathbb{R}_+^*=]0,+\infty[$, $\mathbb{R}_-=]-\infty,0]$ et $\mathbb{R}_-^*=]-\infty,0[$.

III. Borne supérieure, borne inférieure

Définition 5.5

Soit $A\subset\mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$.

- Un réel M est un **majorant** de A si $\forall x\in A, x\leq M$
- Un réel m est un **minorant** de A si $\forall x\in A, m\leq x$
- Un réel M est le **maximum** de A si $M\in A$ **et** $\forall x\in A$, $x\leq M$. On note alors $M=\max(A)$
- Un réel m est le **minimum** de A si $m\in A$ **et** $\forall x\in A$, $m\leq x$. On note alors $m=\min(A)$
- Le plus petit majorant de A, s'il existe, s'appelle la **borne supérieure de** A. On note ce nombre $\sup(A)$
- Le plus grand minorant de A, s'il existe, s'appelle la **borne inférieure de** A. On note ce nombre $\inf(A)$.

Exemple 5.2

- 5 est un majorant de $[0,1]$
- 1 est le maximum de $[0,1]$
- 2 est la borne inférieure de $[2;4]$ et c'est aussi son minimum
- 2 est la borne inférieur de $]2;4]$ mais ce n'est pas son minimum. L'intervalle $]2;4]$ n'admet pas de minimum.

Remarque

On ne note max, min, sup, inf que s'ils existent (comme pour une limite). Par exemple $[0;1[$ n'a pas de maximum, on n'écrit jamais $\max[0,1[$. $\mathbb{Z}$ n'a pas de borne inférieure, on n'écrit jamais $\inf \mathbb{Z}$.

Proposition 5.4

Si le maximum (resp. le minimum) d'un ensemble A existe, alors A admet une borne supérieure (resp. une borne inférieure) et celle-ci coïncide avec le maximum (resp. le minimum). La réciproque est fausse.

Remarque

Si A est fini, alors $\min(A)$ et $\max(A)$ existent. La notion de borne supérieure/borne inférieure est donc superflue pour un ensemble fini.

Définition 5.6

Si x et y sont deux réels, on note $\max(x,y) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq y \\ y & \text{si } y \geq x \end{cases}$. Autrement dit $\max(x,y) = \max(\{x,y\})$.
On définit de même $\min(x,y) = \min(\{x,y\})$.

Si $(x_1,\dots,x_n)$ est une famille finie de réels, on définit de même $\max(x_1,x_2,\dots,x_n)$ et $\min(x_1,x_2,\dots,x_n)$.

Définition 5.7(extremum sur un ensemble)

Si $f : E \to \mathbb{R}$ est une fonction définie sur un ensemble E, on note s'ils existent :

- $\max\limits_{x\in E}(f(x)) = \max(f(E)) = \max\left\{f(x) \mid x \in E\right\}$
- $\min\limits_{x\in E}(f(x)) = \min(f(E)) = \min\left\{f(x) \mid x \in E\right\}$
- $\sup\limits_{x\in E}(f(x)) = \sup(f(E)) = \sup\left\{f(x) \mid x \in E\right\}$
- $\inf\limits_{x\in E}(f(x)) = \inf(f(E)) = \inf\left\{f(x) \mid x \in E\right\}$

Exemples 5.3

- $\max\limits_{k\in[\![1,10]\!]}(k(6-k)) = \max\{5,8,9,8,5,0,-7,-16,-27,-40\} = 9$
- $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{n} = 0$.

Propriété 5.5

Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$. Alors $M \in \mathbb{R}$ est la borne supérieure de A si et seulement si les deux conditions suivantes sont remplies :

- $\forall x \in A, x \leq M$ (M est un majorant de A)
- $\forall m < M, \exists a \in A, m < a$ (c'est le plus petit des majorants)

Propriété 5.6 (de la borne supérieure, admise)

- Toute partie majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.
- Toute partie minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure

Remarque

L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels n'a pas la propriété de la borne supérieure.
Considérons par exemple l'ensemble $A = \{q \in \mathbb{Q} \mid q^2 < 2\}$. Cet ensemble est majoré, par 3 par exemple, mais il n'admet pas de borne supérieure.
La démonstration est complexe, n'essayez pas de la faire chez vous.
Intuitivement, on comprend que la borne supérieure, si elle existait, devrait être égale à $\sqrt{2}$ qui n'est pas un rationnel.

IV. Valeur absolue

Définition 5.8

Soit $x \in \mathbb{R}$, on appelle **valeur absolue** de x le nombre noté $|x|$ et défini par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Si (a, b) est un couple de réels, le nombre $|b - a|$ est la **distance de** a **à** b sur la droite numérique.

Remarque

Pour tout réel x, $|x| = \max(x, -x)$.

Propriété 5.7

- $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall d > 0, |x| = d \Longleftrightarrow x = d \quad \text{ou} \quad x = -d$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall d > 0, |x| \leq d \Longleftrightarrow x \in [-d\ ,\ d]$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}, \forall d > 0, |x - a| \leq d \Longleftrightarrow x \in [a - d\ ,\ a + d]$.

Définition 5.9

Soit $a \in \mathbb{R}$. On appelle **voisinage de** a tout intervalle de la forme $I =]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$.
On a alors $x \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\Longleftrightarrow |x - a| < \varepsilon$.

On appelle **voisinage de** $+\infty$ (resp. de $-\infty$) tout intervalle de la forme $]A, +\infty[$ avec $A \in \mathbb{R}$ (resp. $]-\infty, A[$ avec $A \in \mathbb{R}$).

Propriété 5.8

Pour tous réels x, y on a $|x| \times |y| = |xy|$ et si $y \neq 0$, $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$.

Propriété 5.9 (Inégalités triangulaires)

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

- $|x + y| \leq |x| + |y|$
- $||x| - |y|| \leq |x - y|$

V. Partie entière d'un réel

Propriété 5.10 (admise)

L'ensemble $\mathbb{R}$ est **archimédien**, c'est à dire que pour tous réels a et b vérifiant $0 < a < b$, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $na > b$.

On déduit de cette propriété l'existence et l'unicité de la **partie entière d'un nombre réel**.

Proposition 5.11

Pour tout réel x, il existe un unique entier relatif n tel que $n \leq x < n + 1$.

Définition 5.10

Pour tout réel x, on appelle **partie entière de x**, et on note $\lfloor x \rfloor$ ou $E(x)$, l'unique entier vérifiant l'inégalité :

$$\boxed{\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1}$$

Remarque

On note parfois $\lceil x \rceil$ la partie entière supérieure de x, c'est à dire l'unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n - 1 < x \leq n$.

Propriété 5.12

La fonction $x \mapsto E(x)$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \leq y \Rightarrow E(x) \leq E(y)$$

Propriété 5.13

Pour tout réel x, $E(x+1) = E(x) + 1$.

VI. Racine carrée

Proposition 5.14 (admise)

Pour tout réel positif x il existe un unique réel positif a noté $a = \sqrt{x}$ tel que $a^2 = x$.

Remarque

L'équation $a^2 = x$ d'inconnue a admet deux solutions réelles. $\sqrt{x}$ est l'unique solution **positive** de cette équation.

Propriété 5.15

Pour tout réel x on a $\sqrt{x^2} = |x|$

Remarque

L'égalité $\sqrt{x^2} = x$ est **fausse en général**. Elle n'est vraie que lorsque $x \geq 0$.
L'égalité $(\sqrt{x})^2 = x$ est vraie dès lors que $\sqrt{x}$ est bien défini, c'est à dire aussi lorsque $x \geq 0$.

Propriété 5.16

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est une fonction strictement croissante sur $[0;+\infty[$:

$$\forall a,b \in [0;+\infty[, \ a < b \Longrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$$

Propriété 5.17

Pour tous réels $a, b \geq 0$ on a

- $\sqrt{a} = 0$ si et seulement si $a = 0$
- $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
- $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ si $b \neq 0$
- $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ avec égalité si et seulement si $a = 0$ ou $b = 0$

Définition 5.11

Si a et b sont des réels et c est un réel positif, on appelle **quantité conjuguée** de $a + b\sqrt{c}$ le nombre $a - b\sqrt{c}$. Cette quantité est parfois utile pour simplifier des expressions.

VII. Fonction puissance réelle

Propriété 5.18 (Puissances négatives)

Si $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, alors

$$x^{-n} = \left(x^{-1}\right)^n = \frac{1}{x^n}$$

Remarque

Si $x \in \mathbb{R}^*$, le nombre x^n est donc défini pour tout entier relatif n.

Propriété 5.19 (Racine n-ième, puissances rationnelles)

Soit n un entier naturel non nul. Pour tout réel $x \geq 0$, il existe un unique réel positif a tel que $a^n = x$. On note ce réel $\sqrt[n]{x}$ ou $x^{1/n}$. On a donc selon cette définition définition :

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$$

Pour tout couple d'entiers $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, on définit $x^{p/q}$ par

$$x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$$

Définition 5.12(Puissance réelle)

Soit x un réel **strictement positif** et $a \in \mathbb{R}$ quelconque. On définit le nombre x^a par

$$x^a = \mathrm{e}^{a\ln(x)}$$

Remarque

Cette définition coïncide bien avec la notation d'exposant entiers relatifs et d'exposant rationnels :

- Si $n \in \mathbb{N}$, $x^{-n} = \exp(-n\ln(x)) = \dfrac{1}{\exp(n\ln x)} = \dfrac{1}{x^n}$.
- Si $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, $(x^{p/q})^q = \exp(p\ln(x)/q)^q = \exp(p\ln(x)) = x^p$

Propriété 5.20

Toutes les propriétés algébriques des exposants sont encore vraies pour les exposants réels :

- $\forall x > 0, x^0 = 1$
- $\forall x > 0, \forall a \in \mathbb{R},\ x^{-a} = \dfrac{1}{x^a}$
- $\forall x, y > 0, \forall a \in \mathbb{R},\ (xy)^a = x^a y^a$
- $\forall x, y > 0, \forall a \in \mathbb{R},\ \left(\dfrac{x}{y}\right)^a = \dfrac{x^a}{y^a}$
- $\forall x > 0, \forall a, b \in \mathbb{R}, x^{a+b} = x^a x^b$
- $\forall x > 0, \forall a, b \in \mathbb{R}, x^{a-b} = \dfrac{x^a}{x^b}$
- $\forall x > 0, \forall a, b \in \mathbb{R}, (x^a)^b = x^{ab}$

Propriété 5.21

Soit $a \in \mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto x^a$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et sa dérivée est $x \mapsto ax^{a-1}$.
On en déduit en particulier que $x \mapsto x^a$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ si $a > 0$, et strictement décroissante si $a < 0$.

Remarque

L'écriture de x^a sous la forme $\mathrm{e}^{a\ln(x)}$ est parfois appelée « forme exponentielle de x^a ». Elle peut être utile même lorsque a est un entier.